Оценочные материалы для промежуточной аттестации по дисциплине

Механика деформируемого твердого тела

Код, направление подготовки	08.04.01 Строительство
Направленность (профиль)	Промышленное и гражданское строительство
Форма обучения	
Кафедра-разработчик	Строительные технологии и конструкции
Выпускающая кафедра	Строительные технологии и конструкции

Типовые задания для расчетно-графических работ:

Расчетно-графическая работа 1

Дана прямоугольная полоса-балка длиной l, высотой h и толщиной, равной 1. Выражения для функции напряжений $\varphi(x,y)$ и числовые значения выбрать из табл. Объемными силами пренебречь. Требуется:

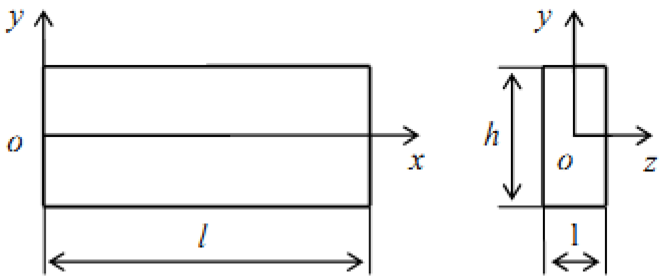
1) проверить, можно ли предложенную функцию $\varphi(x,y)$ принять для решения плоской задачи теории упругости;

2) найти выражения для напряжений σ_x, σ_y и τ_{xy};

3) построить эпюры напряжений σ_x, σ_y и τ_{xy} для сечений $x = x_c$ и $y = y_c$;

4) определить внешние силы (нормальные и касательные), приложенные ко всем четырем граням полосы-балки, дать их изображение на рисунке полосы-балки;

5) выполнить статическую проверку для найденных внешних сил.



№ строки	Функция напряжений $\phi(x,y)$	a	b	l	h	x_c	y_c
		м					
1	$a\left(x^4-y^4\right)+bx^3y+xy^3$	1	1	5	1	1	0,2
2	$ax\left(x^2+y^2\right)+bx^2y+xy$	2	1	6	1	2	0,3
3	$ay\left(x^2+y^2\right)+bxy^2+xy$	2	1	5	2	2	0,4
4	$ax^3+bx^2y+xy^2+xy$	1	2	6	1	2	0,3
5	$a\left(y^4-x^4\right)+bxy^3+x^2y$	1	2	6	2	2	0,5
6	$ax^4-3ax^2y^2+bxy^3$	2	2	4	2	1	0,5
7	$ax^3y-3bx^2y^2+by^4$	2	1	4	2	1	0,5
8	$ax^4-3(a+b)x^2y^2+by^4$	2	1	6	1	3	0,3
9	$axy^3+x^3+y^3-bxy$	1	2	5	1	2	0,2
0	$ax^3y+3bx^2y^2-by^4$	2	1	5	2	2	0,4
	е	д					

Методические указания

Предложенная для решения плоской задачи теории упругости функция φ(x,y) должна удовлетворять бигармоническому уравнению

$$\frac{\partial^4\varphi}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4\varphi}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4\varphi}{\partial y^4}=0$$

Выражения для напряжений σ_x, σ_y и τ_{xy} решаемой задачи получают по следующим формулам:

$$\sigma_x=\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2};\qquad \sigma_y=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2};\qquad \tau_{xy}=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}.$$

Для определения внешних сил (нормальных и касательных), приложенных ко всем четырем граням полосы-балки используют условия на поверхности тела (условия на контуре тела или статические граничные условия):

$$p_{x\nu}=\sigma_x\cos(x,\nu)+\tau_{xy}\cos(\mathrm{y},\nu);$$

$$p_{y\nu}=\tau_{yx}\cos(x,\nu)+\sigma_y\cos(\mathrm{y},\nu).$$

Здесь – $p_{x\nu}$, $p_{y\nu}$ – проекции на оси Ox и Oy внешних сил, действующих на гранях полосы-балки; ν – нормаль к грани; $\cos(x,\nu)$, $\cos(\mathrm{y},\nu)$ – направляющие косинусы нормали ν.

Для проверки найденных внешних сил можно использовать условия равновесия полосы-балки под их действием:

$\sum X = 0$; $\sum Y = 0$; $\sum M_0 = 0$.

Решить такую же задачу, только при условии заделки по контуру.

Расчетно-графическая работа 2

Стальной кубик находится под действием сил, создающих плоское напряженное состояние. Требуется найти:

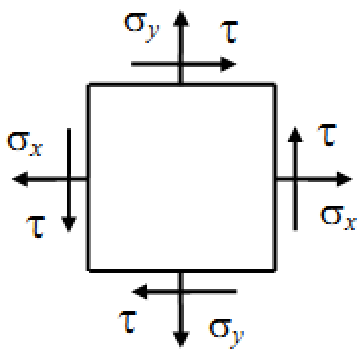
1) главные напряжения и направления главных площадок;

2) максимальные касательные напряжения;

3) относительные деформации ε_x, ε_y, ε_z;

4) относительное изменение объема;

5) удельную потенциальную энергию деформации. Данные взять из табл.



№ строки	σ_x	σ_y	τ	№ строки	σ_x	σ_y	τ
	МПа				МПа		
1	10	10	10	6	-60	-60	-60
2	20	20	20	7	-70	-70	-70
3	30	30	30	8	-80	-80	-80
4	40	40	40	9	-90	-90	-90
5	50	50	50	0	-100	-100	-100
	а	б	в		а	б	в

Методические указания

Угол наклона главных площадок находят по формуле

$$tg2\alpha = \frac{2\tau}{\sigma_x - \sigma_y}.$$

Эта формула дает два взаимно перпендикулярных направления с углами и . Здесь положительное направление для отсчета углов принято против часовой стрелки.

Уравнения для главных напряжений на соответствующих площадках имеют вид

$$\sigma_\alpha = \sigma_x \cos^2\alpha + \sigma_y \sin^2\alpha + \sigma_z \sin 2\alpha$$

$$\sigma_{\alpha+90^\circ} = \sigma_x \sin^2\alpha + \sigma_y \cos^2\alpha - \tau \sin 2\alpha$$

Значения главных напряжений можно найти иначе:

$$\sigma_{\max/\min} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau^2}\ .$$

Максимальные касательные напряжения возникают на площадках, наклоненных под углом 45 к главным, и равны полуразности главных напряжений:

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau^2}\ .$$

Для вычисления деформаций ε_x, ε_y, ε_z по известным нормальным напряжениям σ_x, σ_y, σ_z используют обобщенный закон Гука. При $\sigma_z = 0$ имеем

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left(\sigma_x - \mu\sigma_y\right), \quad \varepsilon_y = \frac{1}{E}\left(\sigma_y - \mu\sigma_x\right), \quad \varepsilon_z = -\frac{\mu}{E}\left(\sigma_x + \sigma_y\right).$$

Относительное изменение объема

$$\theta = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z\ .$$

Удельная потенциальная энергия деформации

$$u = \frac{1}{2E}\left(\sigma_{\max}^2 + \sigma_{\min}^2 - \mu\sigma_{\max}\sigma_{\max}\right).$$

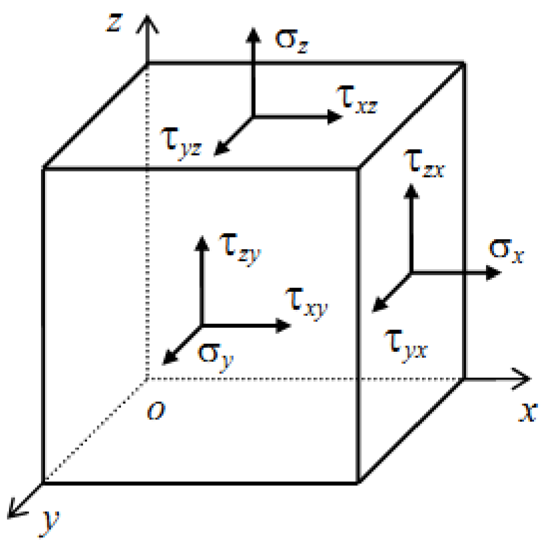
Расчетно-графическая работа 3

Напряженное состояние в точке тела задано девятью компонентами: Требуется:

1) определить главные напряжения и проверить правильность их нахождения; 2) определить положение одной из главных площадок (вычислить направляющие косинусы нормали к этой площадке);

3) определить положения двух других главных площадок (вычислить направляющие косинусы нормалей к этим площадкам).

4) показать на рисунке нормали к главным площадкам. Числовые данные взять из табл.



строки	МПа					
1	30	-30	30	-30	30	-30
2	40	-40	40	-40	40	-40
3	50	-50	50	-50	50	-50
4	60	-60	60	-60	60	-60
5	70	-70	70	-70	70	-70
6	80	-80	80	-80	80	-80
7	90	-90	90	-90	90	-90
8	100	-100	100	-100	100	-100
9	110	-110	110	-110	110	-110
0	120	-120	120	-120	120	-120
	а	б	в	г	д	е

Методические указания

Главные напряжения в задаче на исследование напряженного состояния в точке тела находят, решая кубическое уравнение

$$\sigma^3 - J_1\sigma^2 + J_2\sigma - J_3 = 0. \qquad (*)$$

Здесь коэффициенты являются инвариантами преобразования координат:

$$J_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = const;$$

$$J_2 = \sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2 = const;$$

$$J_3 = \sigma_x\sigma_y\sigma_z + 2\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{zx} - \sigma_x\tau_{yz}^2 - \sigma_y\tau_{zx}^2 - \sigma_z\tau_{xy}^2 = const.$$

Уравнение (*) подстановкой $\sigma = y + \frac{J_1}{3}$ приводим к виду

$$y^3 + py + q = 0.$$

Здесь новые коэффициенты соответственно равны:

$$p = J_2 - \frac{J_1^2}{3}, \qquad q = -\frac{2}{27}J_1^3 + \frac{1}{3}J_1J_2 - J_3.$$

Корни кубического уравнения выражаем через вспомогательный угол ϕ , определяемый из равенства $\cos\varphi = \left|\frac{q}{2r^3}\right|$, где $r = \sqrt{|p|/3}$. Получаем:

$$y_1 = -2r\cos\frac{\varphi}{3}; \qquad y_2 = 2r\cos\left(60^\circ - \frac{\varphi}{3}\right); \qquad y_3 = 2r\cos\left(60^\circ + \frac{\varphi}{3}\right).$$

Проверка

$$y_1 + y_2 + y_3 = 0.$$

Главные напряжения равны:

$$\sigma' = y_1 + \frac{J_1}{3}, \qquad \sigma'' = y_2 + \frac{J_1}{3}, \qquad \sigma''' = y_3 + \frac{J_1}{3}.$$

Этим трем главным напряжениям в дальнейшем присваиваем обозначения σ_1 , σ_2 , σ_3, где $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$.

Контроль правильности решения кубического уравнения проводим, используя инвариантность коэффициентов J_1 , J_2 , J_3:

$$J_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3; \qquad J_2 = \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1; \qquad J_3 = \sigma_1\sigma_2\sigma_3$$

Для определения положения главных площадок вычисляем направляющие косинусы нормалей к главным площадкам l, m, n. Соответствующую систему однородных уравнений

$$(\sigma_x - \sigma)l + \tau_{xy}m + \tau_{xz}n = 0;$$

$$\tau_{yx}l + (\sigma_y - \sigma)m + \tau_{yz}n = 0;$$

$$\tau_{zx}l + \tau_{zy}m + (\sigma_z - \sigma)n = 0.$$

удобно представить в виде

$$(\sigma_x - \sigma)\frac{l}{n} + \tau_{xy}\frac{m}{n} + \tau_{xz} = 0;$$

$$\tau_{yx}\frac{l}{n} + (\sigma_y - \sigma)\frac{m}{n} + \tau_{yz} = 0;$$

$$\tau_{zx}\frac{l}{n} + \tau_{zy}\frac{m}{n} + (\sigma_z - \sigma) = 0.$$

В системе из трех уравнений только два независимые, поэтому, определив l/n, m/n из решения двух уравнений, третье уравнение используем для контроля найденных отношений l/n и m/n. Решение системы в общем виде

$$\frac{l}{n}=\frac{\left(\sigma_y-\sigma\right)\tau_{xz}-\tau_{xy}\tau_{yz}}{\tau_{xy}^2-\left(\sigma_x-\sigma\right)\left(\sigma_y-\sigma\right)},$$

$$\frac{m}{n}=\frac{\left(\sigma_x-\sigma\right)\tau_{yz}-\tau_{xy}\tau_{xz}}{\tau_{xy}^2-\left(\sigma_x-\sigma\right)\left(\sigma_y-\sigma\right)}.$$

Вычислив l/n и m/n, далее, из соотношения между квадратами направляющих косинусов

$$\left(l/n\right)^2+\left(m/n\right)^2+1=1/n^2$$

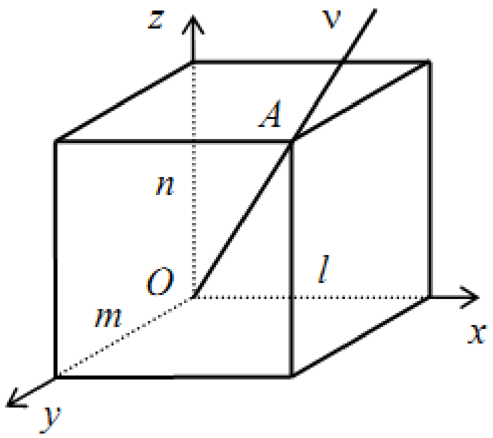
находим два корня ±n. Для дальнейшего расчета достаточно оставить только один корень, например, +n . Соответствующие знаки и величины l и m определяем из отношений l/n и m/n. Полученные l , m , n можно рассматривать как координаты некоторой точки A, лежащей на нормали ν к соответствующей главной площадке.

Если направляющие косинусы нормали ν_1 к площадке главного напряжения σ_1 обозначить через 1_l, m_1, n_1, а нормалей ν_2, ν_3 – соответственно через l_2, m_2, n_2 и l_3, m_3, n_3, то из условия взаимной перпендикулярности нормалей к главным площадкам получим три контрольных равенства:

$$l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2=0;$$

$$l_2l_3+m_2m_3+n_2n_3=0;$$

$$l_3l_1+m_3m_1+n_3n_1=0.$$



Типовые вопросы к экзамену:

1 семестр

1. Напряжения. Единицы измерения. Компоненты тензора напряжений в точке.
2. Уравнения равновесия для напряжений внутри произвольного тела.
3. Тензорное суммирование. Уравнения равновесия, записанные с помощью тензорного суммирования.
4. Закон парности касательных напряжений. Число независимых компонент тензора напряжений в точке.

5. Формула для напряжений, действующих на площадку с заданной внешней единичной нормалью. Тензор напряжений.
6. Касательные и нормальные напряжения. Формула для нормальных напряжений.
7. Формула для касательных напряжений, действующих на площадку с заданной нормалью.
8. Закон преобразования единичного базиса системы координат при ее повороте. Обратный закон.
9. Закон преобразования декартовых координат точек тела при повороте системы координат. Закон обратного преобразования. Свойства компонент матрицы преобразования.
10. Формулы преобразования от напряжений в одной системе координат к напряжениям в другой системе координат. Формулы обратного преобразования.
11. Главные напряжения.
12. Круги Мора для напряженного состояния.
13. Поле перемещений точек тела при его деформировании. Половинное относительное удлинение квадрата длины бесконечно малого волокна в заданном направлении.
14. Компоненты тензора деформаций, их связь с компонентами поля перемещений. Число независимых компонент тензора деформаций.
15. Относительное удлинение бесконечно малого координатного волокна. Формула для вычисления.
16. Относительное удлинение бесконечно малого координатного волокна при малых компонентах тензора деформаций.
17. Закон преобразования компонент тензора деформаций. Обратный закон преобразования тензора деформаций.
18. Тензор малых деформаций. Формулы Коши для тензора малых деформаций.
19. Диаграмма деформирования. Механические константы для изотропного упругого тела: модуль Юнга, коэффициент Пуассона.
20. Принцип суперпозиции. Изотропные и анизотропные материалы. Обобщенный закон Гука для изотропного тела. Матричный вид закона Гука для изотропного тела.
21. Константы Ламе. Закон Гука, выраженный с помощью констант Ламе.
22. Краевая задача теория упругости.
23. Принцип Сен-Венана.
24. Задача о кручении стержня произвольного сечения. Краевая задача для функции депланации. Решение задачи для случая стержня круглого сечения.

2 семестр

1. Внутренние усилия для балки. Дифференциальные уравнения равновесия для внутренних усилий балки.

2. Теория балки Эйлера-Бернулли (классическая теория). Уравнение изгиба. Формулы для напряжений. Противоречия классической теории балки.
3. Формула Журавского для касательных напряжений.
4. Уточненная теория балки (Тимошенко). Уравнение изгиба. Формулы для напряжений.
5. Внутренние усилия для пластин. Дифференциальные уравнения равновесия для внутренних усилий пластин.
6. Уравнение Софи Жермен. Краевые условия для уравнения Софи-Жермен.
7. Пример решения задачи об изгибе прямоугольной пластины синусоидальной нагрузкой.
8. Цилиндрическая система координат.
9. Компоненты тензора деформации в цилиндрической системе координат, формулы их связи с компонентами вектора перемещений.
10. Уравнения равновесия в цилиндрической системе координат.
11. Закон Гука в цилиндрической системе координат.
12. Пространственная задача теории упругости в цилиндрической системе координат.
13. Оператор Лапласа в цилиндрической системе координат.
14. Уравнение Софи Жермен в цилиндрической системе координат.
15. Задача об изгибе круглой пластины, нагруженной постоянной распределенной нагрузкой.
16. Задача об изгибе круглой пластины, нагруженной осесимметричной распределенной нагрузкой.
17. Модели вязко-упругого тела.
18. Ползучесть и релаксация.
19. Задача о деформации вязко-упругой колонны.
20. Задача об изгибе вязко-упругого стержня.