Оценочные материалы для текущего контроля и промежуточной аттестации по дисциплине

Уравнения математической физики

Код, направление подготовки	01.03.02 ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА
Направленность (профиль)	Технологии программирования и анализ данных
Форма обучения	очная
Кафедра-разработчик	Кафедра прикладной математики
Выпускающая кафедра	Кафедра прикладной математики

Типовые контрольные задания

Контрольная №1

I вариант

1. Привести уравнение к каноническому виду в каждой из областей, где его тип сохраняется.

$$u_{xx} + yu_{yy} + \frac{1}{2}u_y = 0.$$

2. С помощью замены искомой функции $u(x,y) = e^{\alpha x+\beta y}v(x,y)$ и приведения к каноническому виду упростите уравнение с постоянными коэффициентами.

$$ax_{xx} + 4au_{xy} + au_{yy} + bu_x + cu_y + u = 0.$$

3. Решить задачу Коши:

$$u_t = 4u_{xx} + t + e^t; \qquad u|_{t=0} = 2;$$

4. Решить начально-краевую задачу:

$$u_t = u_{xx},\ 0 < x < l,\ u_x|_{x=0} = 1, \qquad u|_{x=l} = 0, \qquad u|_{t=0} = 0.$$

II вариант

1. Привести уравнение к каноническому виду в каждой из областей, где его тип сохраняется.

$$u_{xx} + xyu_{yy} = 0.$$

2. С помощью замены искомой функции $u(x,y) = e^{\alpha x+\beta y}v(x,y)$ и приведения к каноническому виду упростите уравнение с постоянными коэффициентами.

$$u_{xy} - bu_x - cu_y = 0.$$

3. Решить задачу Коши:

$$u_t = u_{xx} + 3t^2; \qquad u|_{t=0} = \sin x;$$

4. Решить начально-краевую задачу:

$$u_t = u_{xx},\ 0 < x < l,\ u|_{x=0} = 0,\ u|_{x=l} = 0,\ u|_{t=0} = \sin\frac{\pi}{l}x.$$

Контрольная №2

I вариант

1. Найти функцию, гармоническую внутри единичного круга и такую, что $u\big|_{r=1} = f(\varphi)$, где:

$f(\varphi) = \cos^2 \varphi$;

2. Найти распределение потенциала электростатического поля $u(x, y)$ внутри прямоугольника $[0 < x < a, 0 < y < b]$, если потенциал вдоль стороны этого прямоугольника, лежащей на оси *Oy*, равен υ_0, а три другие стороны прямоугольника заземлены. Предполагается, что внутри прямоугольника нет электрических зарядов.

3. Решить задачу Коши:

$u_{tt} = u_{xx} + 6$; $u\big|_{t=0} = x^2$, $u_t\big|_{t=0} = 4x$;

4. Решить начально-краевую задачу:

$$u_{tt} = u_{xx} + 2b \ (b = \text{const},\ 0 < x < l),\ u\big|_{x=0} = 0,\ u\big|_{x=l} = 0,\ u\big|_{t=0} = u_t\big|_{t=0} = 0;$$

II вариант

1. Найти функцию, гармоническую внутри круга радиуса *R* с центром в начале координат и такую, что:

$\left.\dfrac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=R} = A\cos\varphi$;

2. Найти распределение потенциала электростатического поля $u(x, y)$ внутри коробки прямоугольного сечения $-a < x < a$, $-b < y < b$, две противоположные грани которой ($x = a$ и $x = -a$) имеют потенциал υ_0, а две другие ($y = b$, $y = -b$) заземлены.

3. Решить задачу Коши:

$u_{tt} = 4u_{xx} + xt$; $u\big|_{t=0} = x^2$, $u_t\big|_{t=0} = x$;

4. Решить начально-краевую задачу:

$u_{xx} = u_{tt}$, $0 < x < l$, $u\big|_{x=0} = 0$, $u\big|_{x=l} = t$, $u\big|_{t=0} = u_t\big|_{t=0} = 0$;

Этап: проведение промежуточной аттестации по дисциплине (зачет)

Примеры типовых практических заданий к зачету

Задание 1.

Определить тип уравнений. Привести к каноническому виду.

1. $u_{xx} + 4u_{xy} + u_{yy} + u_x + u_y - x^2y = 0.$
2. $u_{xx} + 2u_{xy} + 5u_{yy} - 32u_y = 0.$
3. $u_{xx} - 2u_{xy} + u_{yy} + 9u_x + 9u_y = 0.$
4. $2u_{xx} + 3u_{xy} + u_{yy} + 7u_x + 4u_y = 0.$
5. $u_{xx} + u_{xy} - 2u_{yy} - 3u_x - 15u_y + 27x = 0.$
6. $9u_{xx} - 6u_{xy} + u_{yy} + 10u_x - 15u_y + x - 2y = 0.$
7. $u_{xx} + 2u_{xy} + 10u_{yy} - 24u_x + 42u_y + 2(x + y) = 0.$
8. $u_{xx} + 4u_{xy} + 13u_{yy} + 3u_x + 24u_y + 9(x + y) = 0.$
9. $u_{xx} - 4u_{xy} + 5u_{yy} - 3u_x + u_y = 0.$
10. $u_{xx} - 6u_{xy} + 9u_{yy} - u_x + 2u_y = 0.$

Задание 2.

Привести уравнение к каноническому виду в каждой из областей, где его тип сохраняется.

1.

$xu_{xx} + yu_{yy} + 2u_x + 2u_y = 0,$

2.

$u_{xx} + xyu_{yy} = 0,$

3.

$yu_{xx} + u_{yy} = 0,$

4.

$u_{xx} + yu_{yy} + 2u_y = 0,$

5.

$yu_{xx} + xu_{yy} = 0$.

Задание 3.

Решить методом разделения переменных следующую задачу для неоднородного уравнения теплопроводности :

1. $u_t = a^2 u_{xx} + 2x + 1, \quad 0 < x < 1, t > 0,$
   $u(0,t) = 1, u(1,t) = 2,$
   $u(x,0) = x + 1.$

2. $u_t = a^2 u_{xx} + x + 2, \quad 0 < x < 1, t > 0,$
   $u_x(0,t) = 1, u(1,t) = 0,$
   $u(x,0) = x - 1.$

3. $u_t = a^2 u_{xx} + 2x + 1, \quad 0 < x < 1, t > 0,$
   $u(0,t) = 1, u_x(1,t) = 2,$
   $u(x,0) = 2x + 1.$

4. $u_t = a^2 u_{xx} + x + 1, \quad 0 < x < 1, t > 0,$
   $u(0,t) = 0, u(1,t) = 1,$
   $u(x,0) = x.$

5. $u_t = a^2 u_{xx} + 2x + 1, \quad 0 < x < 1, t > 0,$
   $u_x(0,t) = 2, u(1,t) = 1,$
   $u(x,0) = 2x - 1.$

6. $u_t = a^2 u_{xx} + x + 2, \quad 0 < x < 1, t > 0,$
   $u(0,t) = 0, u_x(1,t) = 1,$
   $u(x,0) = x.$

Этап: проведение промежуточной аттестации по дисциплине (экзамен)

Задание для показателя оценивания дескриптора «Знает»	Вид задания
Сформулируйте развернутые ответы на следующие теоретические вопросы (при необходимости продемонстрируйте вывод уравнений и доказательства теорем): 1. Классификация дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка с двумя независимыми переменными. 2. Приведение к канонической форме уравнения гиперболического типа. 3. Приведение к канонической форме уравнения параболического типа.	- теоретический

4. Приведение к канонической форме уравнения эллиптического типа. 5. Уравнение малых поперечных колебаний струны. 6. Уравнение продольных колебаний упругого стержня. 7. Энергия колебаний струны. 8. Постановка начально-краевых задач для уравнения колебаний. 9. Теорема единственности для первой начально-краевой задачи уравнения колебаний. 10. Решение начально-краевых задач для уравнения свободных колебаний методом разделения переменных. Задача Штурма-Лиувилля. 11. Решение начально-краевых задач для неоднородного уравнения колебаний методом разделения переменных. Неоднородные граничные условия. 12. Задача Коши для уравнения колебаний на прямой. Формула Даламбера. 13. Задача Коши для неоднородного уравнения колебаний на прямой. 14. Метод распространяющихся волн. 15. Метод продолжений. 16. Задача о распространении тепла вдоль однородного стержня. 17. Задача о распространении тепла в ограниченной области пространства. 18. Постановка начально-краевых задач для уравнения теплопроводности. 19. Принцип максимального значения для решения однородного уравнения теплопроводности на отрезке.	

20. Теорема единственности для первой начально-краевой задачи уравнения теплопроводности. Устойчивость решения. 21. Решение начально-краевых задач для уравнений параболического типа методом разделения переменных. 22. Функция температурного влияния мгновенного точечного источника тепла. 23. Задача Коши для уравнения теплопроводности. Фундаментальное решение уравнения теплопроводности. 24. Решение задач теплопроводности на прямой и полупрямой методом интегральных представлений. 25. Задачи приводящие к уравнениям Лапласа и Пуассона. Постановка краевых задач. 26. Оператор Лапласа в ортогональных криволинейных координатах. 27. Фундаментальные решения уравнений Лапласа. 28. Первая и вторая формулы Грина. 29. Основная интегральная формула Грина. 30. Основные свойства гармонических функций. 31. Принцип максимального значения для гармонических функций. 32. Единственность и устойчивость первой краевой задачи для уравнения Лапласа. 33. Внешние задачи Дирихле для уравнения Лапласа. 34. Внешние задачи Неймана для уравнения Лапласа. 35. Функция Грина первой краевой задачи для уравнения Лапласа, ее основные свойства. 36. Метод электростатических изображений.	

37. Объемный потенциал. 38. Потенциал простого слоя и его свойства. 39. Потенциал двойного слоя и его свойства. 40. Приложение поверхностных потенциалов к решению краевых задач.	

Задание для показателя оценивания дескриптора «Умеет», «Владеет»	Вид задания
1. Привести дифференциальное уравнение в частных производных второго порядка к каноническому виду в каждой из областей, где его тип сохраняется. 2. Решить начально-краевую задачу для уравнения теплопроводности методом разделения переменных. 3. Решить задачу теплопроводности на прямой или полупрямой методом интегральных представлений. 4. Решить задачу Коши для уравнения колебаний на прямой или полупрямой. 5. Решить начально-краевую задачу для уравнения колебаний методом разделения переменных. 6. Решить методом разделения переменных краевую задачу на уравнение Лапласа. 7. Методом электростатических изображений найти функцию Грина оператора Лапласа. 8. . Используя поверхностный потенциал простого (или двойного слоя) слоя решить краевую задачу для уравнения Лапласа.	- практический>