

Документ подписан простой электронной подписью  
Информация о владельце:  
ФИО: Косенок Сергей Михайлович  
Должность: ректор  
Дата подписания: 11.06.2026 11:27:45  
Уникальный программный ключ:  
e3a68f3eaa1e62674b54f4998099d3d6bfdcf836

**Оценочные материалы для текущего контроля и промежуточной аттестации  
по дисциплине**

**Методы прикладной математики в задачах гидродинамики,  
3 семестр**

Код, направление подготовки	03.04.02
Направленность (профиль)	Цифровые технологии в геофизике
Форма обучения	очная
Кафедра-разработчик	Кафедра экспериментальной физики
Выпускающая кафедра	Кафедра экспериментальной физики

Типовые задания для контрольной работы:

**Задача 1.** Применение преобразования Фурье к задаче о течении в полупространстве

Рассматривается нестационарное течение вязкой несжимаемой жидкости над плоской твёрдой стенкой, занимающей полупространство  $y \geq 0$ . Стенка начинает двигаться вдоль оси  $x$  с постоянной скоростью  $U_0$  в момент времени  $t = 0$ . Поле скорости  $u(y, t)$  удовлетворяет уравнению теплопроводности (задача Стокса):

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad t > 0, y > 0,$$

с начальным условием  $u(y, 0) = 0$  и граничными условиями:

$$u(0, t) = U_0, \quad u(\infty, t) = 0.$$

Задания:

- Применив преобразование Фурье по переменной  $y$  (или метод функции ошибок), найдите аналитическое выражение для профиля скорости  $u(y, t)$ .
- Используя результат, определите толщину пограничного слоя  $\delta(t)$ , на которой скорость достигает  $0.99 U_0$ .

**Задача 2.** Построение разностной схемы для уравнения Бюргерса

Рассматривается одномерное нелинейное уравнение Бюргерса (модель течения с вязкостью):

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad x \in [0, L], t > 0,$$

с периодическими граничными условиями и начальным условием  $u(x, 0) = \sin(2\pi x/L)$ .

Параметры:  $L = 1, \nu = 0.01$ .

Задания:

- Запишите для этого уравнения явную конечно-разностную схему первого порядка по времени и второго порядка по пространству. Используйте равномерную сетку с шагами  $\Delta x$  и  $\Delta t$ .
- Исследуйте устойчивость схемы линейным методом фон Неймана, заменив нелинейный член  $u \partial u / \partial x$  на  $U \partial u / \partial x$  с постоянной скоростью  $U$  (аппроксимация). Получите условие на  $\Delta t$  для устойчивости.
- Качественно объясните, почему явная схема может давать нефизичные осцилляции при больших градиентах скорости, и предложите один способ их устранения (например, использование схемы с разностями против потока или добавление искусственной вязкости).

Типовые вопросы к зачёту:

Задание для показателя оценивания дескриптора «Знает»	Вид задания
<p>Типовые вопросы к экзаменационному тесту:</p> <ol style="list-style-type: none"><li>1. Основные уравнения гидродинамики. Уравнение неразрывности, уравнение Навье–Стокса для несжимаемой жидкости. Физический смысл каждого члена (конвективное ускорение, вязкие напряжения, градиент давления).</li><li>2. Классификация уравнений в частных производных. Типы: эллиптические (Лапласа), параболические (теплопроводности), гиперболические (волновое). Примеры гидродинамических задач для каждого типа.</li><li>3. Граничные условия в задачах гидродинамики. Условие прилипания, скольжения, свободной поверхности. Когда и для каких течений применяются.</li><li>4. Потенциальные течения. Потенциал скорости, функция тока. Уравнение Лапласа для потенциала. Связь потенциала с полем скорости.</li><li>5. Метод функций Грина для уравнения Лапласа. Идея метода, построение функции Грина для полупространства и сферы. Пример расчёта обтекания сферы.</li><li>6. Метод интегральных преобразований (Фурье и Лапласа). Область применения. Решение одномерного уравнения теплопроводности с помощью преобразования Фурье. Пример задачи Стокса о внезапном движении пластины.</li><li>7. Задача о движении пластины (задача Стокса). Постановка, применение преобразования Лапласа. Получение профиля скорости (функция ошибок). Анализ решения.</li><li>8. Метод характеристик. Для гиперболических уравнений. Построение характеристик для уравнения мелкой воды. Инварианты Римана. Пример расчёта распространения волны.</li><li>9. Гидравлический прыжок и распад разрыва. Постановка задачи о распаде произвольного разрыва. Соотношения Ренкина–Гюгонио на ударной волне. Пример численной реализации методом характеристик.</li><li>10. Теория пограничного слоя Прандтля. Допущения (малая толщина слоя, большие градиенты скорости). Уравнения пограничного слоя для плоской пластины. Понятие о методе сращиваемых разложений.</li><li>11. Асимптотические методы в гидродинамике. Метод сращиваемых разложений на примере обтекания тонкого профиля. Внешнее и внутреннее разложения. Условие сращивания.</li></ol>	теоретический

<p>12. Конечно-разностные методы: явные и неявные схемы. Построение разностных схем для уравнения теплопроводности. Устойчивость по фон Нейману. Пример явной схемы (ограничение на шаг по времени) и неявной схемы (безусловная устойчивость).</p> <p>13. Схема Лакса–Вендроффа. Для какого уравнения разработана (уравнение переноса, Бюргерса). Алгоритм построения (двухшаговая схема). Преимущества: второй порядок точности, учёт нелинейности.</p> <p>14. Численное решение уравнения Бюргерса. Физический смысл (модель нелинейных волн и разрывов). Сравнение явной и неявной схем. Проблема размытия разрыва и методы её решения.</p> <p>15. Метод конечных объемов. Принцип интегральной консервативности. Отличие от метода конечных разностей. Построение схем с разностями против потока (upwind) для уравнения переноса.</p> <p>16. Upwind-схемы (схемы с разностями против потока). Необходимость учёта направления скорости. Формула для схемы первого порядка точности. Пример для одномерного течения. Понятие численной диффузии.</p> <p>17. Тестовая задача о течении в каверне. Геометрия и граничные условия. Почему эта задача является эталонной для верификации. Какие численные методы обычно применяются (метод конечных объемов, SIMPLE-алгоритм).</p> <p>18. Бессеточные методы: SPH и LBM. Принципы метода гидродинамики сглаженных частиц (SPH) и решёточного метода Больцмана (LBM). Области применения (свободная поверхность, течения в пористых средах). Преимущества перед сеточными методами.</p>	
---	--

Задание для показателя оценивания дескриптора «Умеет»	Вид задания
Защита отчета одного из практических заданий	практический