

Документ подписан простой электронной подписью
 Информация о владельце:
 ФИО: Косенок Сергей Михайлович
 Должность: ректор
 Дата подписания: 11.06.2026 09:22:14
 Уникальный программный ключ:
 e3a68f3eaa1e62674b54f4998099d3d6bfdfc836

Оценочные средства для промежуточной аттестации по дисциплине

Теоретическая механика, 4 семестр

Код, направление подготовки	03.03.02 Физика
Направленность (профиль)	Цифровые технологии в геофизике
Форма обучения	очная
Кафедра-разработчик	Кафедра экспериментальной физики
Выпускающая кафедра	Кафедра экспериментальной физики

Типовые задания для контрольной работы:

РАЗДЕЛЫ I – VII

1. Записать преобразование поворота $\vec{r} \rightarrow \vec{r}' = \vec{r} + \delta\vec{\varphi} \times \vec{r}$ в матричной форме. Используйте

следующие обозначения: $\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $\delta\vec{\varphi} = \begin{pmatrix} \delta\varphi_x \\ \delta\varphi_y \\ \delta\varphi_z \end{pmatrix}$. Каковы свойства матрицы

(инфинитезимальных) поворотов?

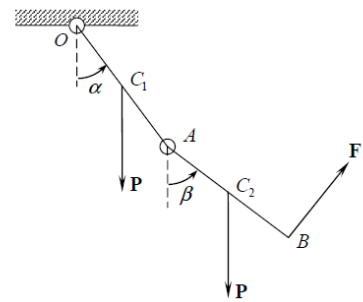
2. Покажите, что последовательное выполнение двух инфинитезимальных преобразований поворота на углы $\delta\vec{\varphi}_1$ и $\delta\vec{\varphi}_2$ представляет собой также поворот и найдите соответствующий ему угол, а также направление оси поворота.
3. Рассмотрите коммутатор двух преобразований поворота на углы $\delta\vec{\varphi}_1$ и $\delta\vec{\varphi}_2$. Коммутатор представляет собой **разность** двух последовательных преобразований, производимых в разной последовательности. Покажите, что коммутатор отличен от нуля и представляет собой бесконечно малый поворот более высокого (второго) порядка. Найдите угол этого поворота.
4. На плоскости XU задан вектор $\vec{V} = (ax + by, cx + dy)$, где a , b , c и d – постоянные. Доказать, что вектор \vec{V} есть линейная комбинация векторов $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}$ и $\vec{t} = y\vec{i} - x\vec{j}$ с постоянными коэффициентами. Используйте ортогональность векторов \vec{r} и \vec{t} , а также то, что матрица $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, определяющая вектор \vec{V} , является ортогональной с точностью до множителя. Найдите указанные коэффициенты.
5. Покажите, что: а) $(\vec{A} - \vec{B}) \times (\vec{A} + \vec{B}) = 2\vec{A} \times \vec{B}$; б) $(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = |\vec{A}|^2 |\vec{B}|^2 - (\vec{A} \cdot \vec{B})^2$;
 а. с) $(\vec{A} \times \vec{B}) \times (\vec{C} \times \vec{D}) = 0$, если четыре вектора \vec{A} , \vec{B} , \vec{C} , и \vec{D} лежат в одной плоскости.

6. Вектор \vec{D} является линейной комбинацией трёх не ортогональных и некопланарных векторов: $\vec{D} = \alpha\vec{A} + \beta\vec{B} + \gamma\vec{C}$. Показать, что коэффициенты разложения α, β, γ определяются соотношениями: $\alpha = \frac{\vec{D} \cdot (\vec{B} \times \vec{C})}{\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C})}$, и т.д.
7. Показать, что $(\vec{A} \times \vec{B}) \times (\vec{C} \times \vec{D}) = (\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{D}))\vec{C} - (\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}))\vec{D}$. Как объяснить отсутствие в этом выражении симметрии между векторами \vec{A} и \vec{B} с одной стороны, и \vec{C} и \vec{D} с другой?
8. Показать, что $\vec{A} \times (\vec{B} \times (\vec{C} \times \vec{D})) = (\vec{A} \times \vec{C})\vec{B} \cdot \vec{D} - (\vec{A} \times \vec{D})\vec{B} \cdot \vec{C}$.
9. Укажите, как алгебраически, используя линейные комбинации, из трёх не ортогональных векторов \vec{A}, \vec{B} и \vec{C} (считая их известными) получить три ортогональных вектора \vec{A}', \vec{B}' и \vec{C}' . Найти коэффициенты разложений штрихованных векторов по «нештрихованному». Является ли процедура ортогонализации однозначной?
10. Найти траекторию, скорость и ускорение материальной точки, если закон движения имеет вид $x = a \cos \omega t, y = b \sin \omega t, z = 0$, где $a, b, \omega = \text{const}$. Траектории изобразить в пространстве.
11. Определить период одномерного движения частицы массы m с энергией E в потенциальном поле вида $U = -\frac{U_0}{\text{ch}^2 \alpha x}$, ($-U_0 < E < 0$).
12. Найти траекторию заряженной частицы с массой m и зарядом q в электрическом поле напряженности \vec{E} , если при $x(0) = 0, \dot{x}(0) = 2$. скорость частицы равна \vec{V}_0 , причем $\vec{E} = \vec{E}_0 \cos \omega t$, а \vec{V}_0 перпендикулярно \vec{E}_0 .
13. Проинтегрировать уравнения движения материальной точки массы $m = 1$ в поле $U(r) = 1/2r^2$, для $E > 0$.
14. Найти закон движения частицы в поле $U(x) = -Ax^4$, если энергия ее равна нулю.
15. Найти ускорение материальной точки, движущейся по траектории $\rho = \rho_0 e^{-\lambda \phi}, z = 0$, если секторная скорость (то есть площадь, «заметаемая» радиус-вектором точки в единицу времени) $\sigma = \sigma_0 = \text{const}$ относительно начала координат. Параметры $\rho_0, \lambda, \sigma_0$ траектории считать известными. Вектор ускорения представить как функцию расстояния ρ до начала координат.
16. Указать условия финитности движения, найти точки поворота и период колебаний для материальной точки массы $m = 1$ в поле: $U(x) = x^2$.
17. Тело массы m движется по закону $x = a \cos \omega t, y = b \sin \omega t$. Определить силу, действующую на частицу в каждой точке траектории.
18. Точка массой m движется по спирали Архимеда, в полярной системе координат имеющей вид $\rho = At, \phi = Bt$. Найти действующую на точку силу – ее проекции и модуль.
19. Проинтегрировать уравнение движения материальной точки массы $m = 2$, движущейся в поле $U = -\text{tg}^2 x$, если при $t = 0, x = 0, \dot{x} = 2$.
20. Точка движется в плоскости так, что ее секторная скорость $\sigma_z = k\rho^2/2$, а угол между ускорением и радиусом-вектором точки постоянен и равен $\pi/4$. Найти закон движения и уравнение траектории точки, если $\rho(0) = 0, \phi(0) = 0$ и $\dot{\rho}(0) = \dot{\rho}_0$.

21. Найти точки поворота и исследовать характер движения материальной точки массы $m = 1$, движущейся в поле: $U(r) = \frac{1}{2}r^2$
22. Найти точки поворота и исследовать характер движения материальной точки массы $m = 1$, движущейся в поле: $U(r) = \left(\frac{1}{r^2} + r^2\right)\frac{1}{2}$
23. Найти точки поворота и исследовать характер движения материальной точки массы $m = 1$, движущейся в поле: $U(r) = 1/r^4$.
24. Определить траекторию частицы в поле $U(r) = \frac{\alpha}{r} - \frac{\beta}{r^2}$. Найти время падения частицы в центр поля с расстояния r_0 . Сколько оборотов вокруг центра сделает при этом частица?

25. Найти точки поворота и исследовать характер движения материальной точки массы $m = 1$, движущейся в поле: $U(r) = -\alpha^2 / 2r^2$, $\alpha = const$.

26. Двойной маятник, состоящий из двух однородных стержней массы m и длины ℓ каждый, может совершать движение в вертикальной плоскости (в точках A и O — цилиндрические шарниры). Помимо силы тяжести, действующей на стержни, к точке B стержня AB приложена постоянная по величине перпендикулярная к стержню сила F (см. рисунок). Определить положения равновесия.



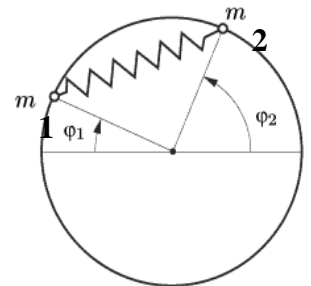
27. Однородный стержень $AB = \ell$ может двигаться в вертикальной плоскости XU так, что конец A скользит по прямой OY , а конец B — по кривой $y = f(x)$. Плоскость XU вращается с постоянной угловой скоростью Ω вокруг вертикальной оси OY . Трение в системе отсутствует. Какой должна быть функция $f(x)$, чтобы любое положение стержня было положением относительного равновесия, если $f(0) = 0$?

28. Мотоциклист увеличивает свою скорость сначала с 55 до 60 км/ч, а затем с 60 до 65 км/ч. Сравнить величины совершаемой при этом работы.

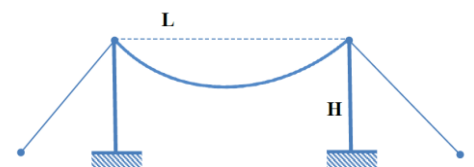
29. Каждый элемент бесконечно тонкого однородного неподвижного обруча радиуса R и общей массы M притягивает материальную точку P , лежащую на перпендикуляре к плоскости обруча, проходящем через его центр O . Силы притяжения описываются законом всемирного тяготения. Определить скорость, с которой материальная точка P пересечет плоскость обруча, если в начальный момент расстояние OP было равно l , а точка покоилась.

30. Однородную цепочку держат за верхний конец так, что нижним концом она касается стола, а затем отпускают. Показать, что в процессе падения цепочки сила давления на стол превышает вес лежащей на столе части цепочки в три раза.

31. Две точечные массы m_1 и m_2 (см. рисунок), связанные пружиной жесткости k , могут двигаться без трения, по неподвижному кольцу радиуса r , лежащему в горизонтальной плоскости. Длина пружины в недеформированном состоянии равна l . Составить уравнения Лагранжа. Используя аналогию с поступательным движением системы двух тел, определить новые обобщенные координаты и найти закон движения в квадратурах.

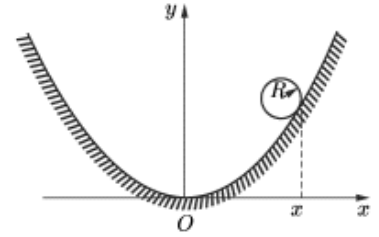


32. Определить форму кривой, которую приобретает нерастяжимая нить массы M и длины l , закреплённая



на двух вертикальных опорах (см. рисунок). Как следует ориентировать боковые растяжки, чтобы моменты сил реакций, действующих на опоры, были равны нулю? Предельно допустимая сила натяжения растяжек равна F , а расстояние между опорами – L .

33. Однородный диск радиуса R и массы m (см. рисунок) может катиться без проскальзывания по параболе $y = ax^2/2$. Ось OY вертикальна, $Ra \leq 1$. Составить функцию Лагранжа, приняв за обобщенную координату абсциссу x точки касания. Получить уравнения Лагранжа.

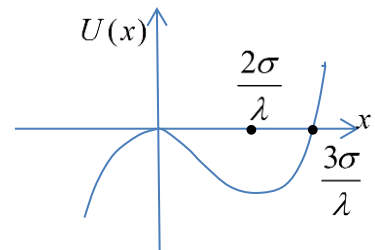


34. Шарнирно закреплённая за один конец спицы массы M может свободно вращаться в горизонтальной плоскости без трения. На спицу надета лёгкая пружина и бусинка массы m , прикреплённая к одному концу пружины. Вторым концом пружины прикреплен к шарниру. В начальный момент пружина не натянута. Резким толчком спице сообщают угловую скорость ω_0 . Получить уравнения Эйлера – Лагранжа для этой системы. Описать движение бусинки и спицы. Длина ненапрянутой пружины равна l_0 .

35. Потенциальная энергия частицы $U(x) = -\frac{\sigma x^2}{2} + \frac{\lambda x^3}{3!}$.

Начальные условия: $\dot{x}(0) = 0$, $x(0) = A$, $A = \frac{3\sigma}{\lambda}$. Найти

решение $x(t)$ уравнений движения.



36. Космический аппарат находится на круговой орбите радиуса r_0 . Найти величину тангенциального приращения скорости δv для перехода на эллиптическую орбиту с полуосью $a > r_0$ и время перелёта до апогея новой орбиты.
37. Найти скорость частицы после упругого столкновения с плоскостью, движущейся поступательно с постоянной скоростью. Ориентация плоскости и направления скоростей частицы и плоскости до столкновения произвольны.
38. Две точечные массы m_1 и m_2 , связанные пружиной жесткости k , могут двигаться без трения по сторонам прямого угла $\angle XOY$, сторона OY которого вертикальна. Длина пружины в ненапряжённом состоянии равна l_0 . Ускорение свободного падения равно g . Составить уравнения Лагранжа.
39. Жёсткая проволока согнута в форме параболы. На проволоку надета бусинка массы M . Парабола ориентирована вертикально в поле тяжести, так что бусинка может свободно перемещаться по проволочке, совершая колебания. Проволочку приводят во вращение относительно (вертикально расположенной) оси симметрии параболы с угловой скоростью ω . Записать функцию Лагранжа и получить уравнения движения.
40. Найти решение уравнений движения маятника Фуко в окрестности положения равновесия. Указание: функция Лагранжа, записанная во вращающейся с угловой скоростью $\vec{\Omega}$ системе координат, имеет вид: $L = \frac{m(\vec{v} + \vec{\Omega} \times \vec{r})^2}{2} + m\vec{g} \cdot \vec{r}$.

РАЗДЕЛ I

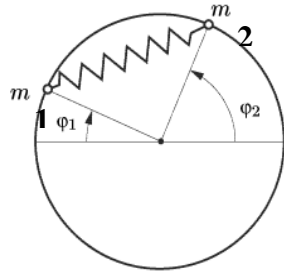
(Методы описания движений, кинематика)

1. Найти траекторию, скорость и ускорение материальной точки, если закон движения имеет вид $x = a \cos \omega t$, $y = b \sin \omega t$, $z = 0$, где $a, b, \omega = \text{const}$. Траектории изобразить в пространстве.
2. Найти ускорение материальной точки, движущейся по траектории $\rho = \rho_0 e^{-\lambda \varphi}$, $z = 0$; если секторная скорость $\vec{\sigma} = \vec{\sigma}_0 = \text{const}$ относительно начала координат. Параметры траектории считать известными. Вектор ускорения представить как функцию расстояния до начала отсчета.
3. Точка массой m движется по спирали Архимеда, в полярной системе координат имеющей вид $\rho = At$, $\varphi = Bt$. Найти действующую на точку силу – ее проекции и модуль.
4. Точка движется в плоскости так, что ее секторная скорость $\sigma_z = k\rho^2/2$, а угол между ускорением и радиусом-вектором точки постоянен и равен $\pi/4$. Найти закон движения и уравнение траектории точки, если $\rho(0) = 0$, $\varphi(0) = 0$ и $\dot{\rho}(0) = \dot{\rho}_0$.
5. Тело массы m движется по закону $x = a \cos \omega t$, $y = b \sin \omega t$. Определить силу, действующую на частицу в каждой точке траектории.

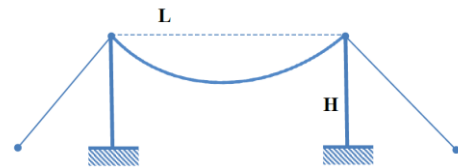
РАЗДЕЛ II

(Принцип наименьшего действия и основная задача механики)

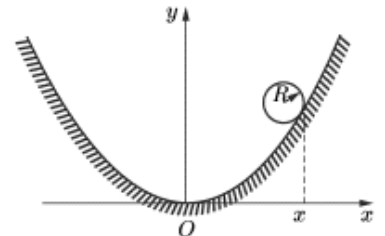
1. Две точечные массы m_1 и m_2 (см. рисунок), связанные пружиной жесткости k , могут двигаться без трения, по неподвижному кольцу радиуса r , лежащему в горизонтальной плоскости. Длина пружины в недеформированном состоянии равна ℓ . Составить уравнения Лагранжа. Используя координаты $\mathcal{Q}_1 = (\varphi_1 + \varphi_2)/2$ и $\mathcal{Q}_2 = (\varphi_1 - \varphi_2)/2$, найти закон движения в квадратурах.



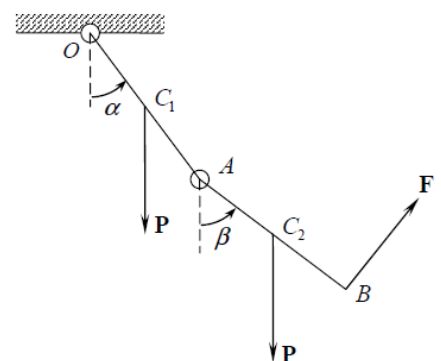
2. Определить форму кривой, которую приобретает нерастяжимая нить массы M и длины ℓ , закреплённая на двух вертикальных опорах (см. рисунок). Как следует ориентировать боковые растяжки, чтобы моменты сил реакций, действующих на опоры, были равны нулю? Предельно допустимая сила натяжения растяжек равна F , высота опор – H , а расстояние между ними – L .



3. Однородный диск радиуса R и массы m (см. рисунок) может катиться без проскальзывания по параболе $y = ax^2/2$. Ось OY вертикальна, $Ra \leq 1$. Составить функцию Лагранжа, приняв за обобщенную координату абсциссу x точки касания. Получить уравнения Лагранжа.



4. Двойной маятник, состоящий из двух однородных стержней массы m и длины ℓ каждый, может совершать движение в вертикальной плоскости (в точках A и O – цилиндрические шарниры). Помимо силы тяжести, действующей на стержни, к точке B



- стержня AB приложена постоянная по величине перпендикулярная к стержню сила \mathbf{F} (см. рисунок). Определить положения равновесия.
5. Шарнирно закреплённая за один конец спица массы M может свободно вращаться в горизонтальной плоскости без трения. На спицу надета лёгкая пружина и бусинка массы m , прикреплённая к одному концу пружины. Вторым концом пружины прикреплён к шарниру. В начальный момент пружина не натянута. Резким толчком спице сообщают угловую скорость ω_0 . Получить уравнения Эйлера – Лагранжа для этой системы. Описать движение бусинки и спицы. Длина нерастянутой пружины равна ℓ_0 .
 6. Используя оптико-механическую аналогию, найти траектории светового луча в среде с коэффициентом преломления $n(x, y, z) = a(x^2 + y^2 + z^2)^{-1/4}$.

РАЗДЕЛЫ III - IV (Законы сохранения, Малые колебания)

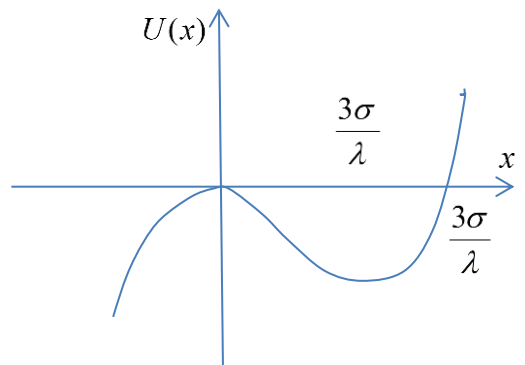
1. Определить период одномерного движения частицы массы m с энергией E в потенциальном поле вида $U = -\frac{U_0}{\operatorname{ch}^2 \alpha x}$, $(-U_0 < E < 0)$.
2. Найти траекторию заряженной частицы с массой m и зарядом q в электрическом поле напряженности $\vec{E} = \vec{E}_0 \cos \omega t$, если $x(0) = 0$, $y(0) = 0$, а начальная скорость частицы \vec{V}_0 перпендикулярна \vec{E}_0 .
3. Проинтегрировать уравнения движения материальной точки массы $m = 1$ в поле $U(r) = 1/2r^2$, для $E > 0$.
4. Найти закон движения частицы в поле $U(x) = -Ax^4$, если энергия ее равна нулю.
5. Указать условия финитности движения, найти точки поворота и период колебаний для материальной точки массы $m = 1$ в поле: $U(x) = x^2$.
6. Проинтегрировать уравнение движения материальной точки массы $m = 2$, движущейся в поле $U = -\operatorname{tg}^2 x$, если при $t = 0$ $x = 0$, $\dot{x} = 2$.
7. Найти точки поворота и исследовать характер движения материальной точки массы $m = 1$, движущейся в поле: $U(r) = \frac{1}{2}r^2$.
8. Найти точки поворота и исследовать характер движения материальной точки массы $m = 1$, движущейся в поле: $U(r) = \left(\frac{1}{r^2} + r^2\right)\frac{1}{2}$.
9. Найти точки поворота и исследовать характер движения материальной точки массы $m = 1$, движущейся в поле: $U(r) = 1/r^4$.
10. Определить траекторию частицы в поле $U(r) = \frac{\alpha}{r} - \frac{\beta}{r^2}$. Найти время падения частицы в центр поля с расстояния r_0 . Сколько оборотов вокруг центра сделает при этом частица?
11. Найти точки поворота и исследовать характер движения материальной точки массы $m = 1$, движущейся в поле: $U(r) = -\alpha^2 / 2r^2$, $\alpha = \operatorname{const}$.
12. Мотоциклист увеличивает свою скорость сначала с 55 до 60 км/ч, а затем с 60 до 65 км/ч. Сравнить величины совершаемой при этом работы.

13. Каждый элемент бесконечно тонкого однородного неподвижного обруча радиуса R и общей массы M притягивает материальную точку P , лежащую на перпендикуляре к плоскости обруча, проходящем через его центр O . Силы притяжения описываются законом всемирного тяготения. Определить скорость, с которой материальная точка P пересечет плоскость обруча, если в начальный момент расстояние OP было равно ℓ , а точка покоилась.
14. Однородную цепочку держат за верхний конец так, что нижним концом она касается стола, а затем отпускают. Показать, что в процессе падения цепочки сила давления на стол превышает вес лежащей на столе части цепочки в три раза.

15. Потенциальная энергия частицы $U(x) = -\frac{\sigma x^2}{2} + \frac{\lambda x^3}{3!}$. Начальные условия:

$$\dot{x}(0) = 0, x(0) = A, A = \frac{3\sigma}{\lambda}. \text{ Найти решение } x(t) \text{ уравнений движения.}$$

16. Космический аппарат находится на круговой орбите радиуса r_0 . Найти величину тангенциального приращения скорости δv для перехода на эллиптическую орбиту с полуосью $a > r_0$ и время перелёта до апогея новой орбиты.

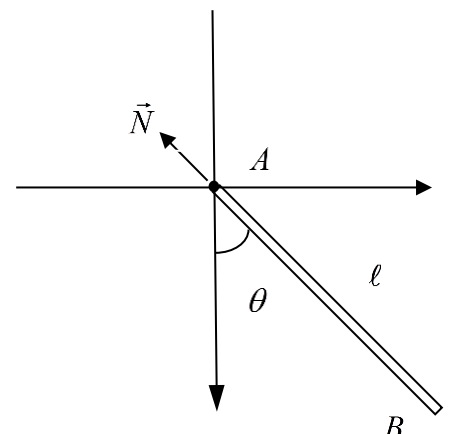
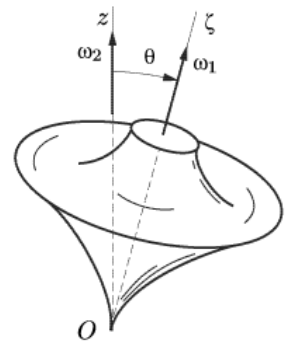


17. Найти скорость частицы после упругого столкновения с плоскостью, движущейся поступательно с постоянной скоростью. Ориентация плоскости и направления скоростей частицы и плоскости до столкновения произвольны.

РАЗДЕЛЫ V

(Уравнения движения твёрдого тела)

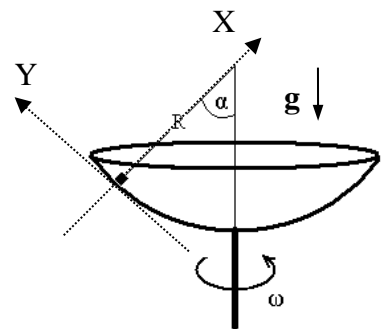
1. Юла (см. рисунок) вращается вокруг своей оси симметрии $O\zeta$ с постоянной угловой скоростью ω_1 . Ось $O\zeta$ равномерно вращается относительно вертикали Oz с угловой скоростью ω_2 , так что угол θ остаётся постоянным (регулярная прецессия). Найти угловую скорость и угловое ускорение юлы относительно Oz .
2. При движении твёрдого тела заданы его угловая скорость $\vec{\omega}_r$ и угловое ускорение $\vec{\epsilon}_r$ относительно некоторой подвижной системы отсчета. Известны также угловая скорость $\vec{\omega}_e$ и угловое ускорение $\vec{\epsilon}_e$ этой подвижной системы отсчета относительно неподвижной. Определить угловую скорость $\vec{\omega}$ и угловое ускорение $\vec{\epsilon}$ тела.
3. Однородный стержень AB движется в вертикальной плоскости вокруг горизонтальной оси, проходящей через точку A . Найти закон движения стержня и силы реакции, действующие со стороны оси.



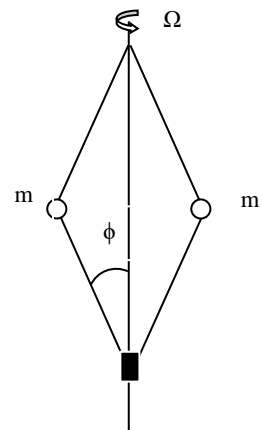
РАЗДЕЛ VI (Неинерциальные системы отсчёта)

1. Найти решение уравнений движения маятника Фуко в окрестности положения равновесия. Указание: функция Лагранжа, записанная во вращающейся с угловой скоростью $\vec{\Omega}$ системе координат, имеет вид: $L = \frac{m(\vec{v} + \vec{\Omega} \times \vec{r})^2}{2} + m\vec{g} \cdot \vec{r}$.
2. Однородный стержень $AB = \ell$ может двигаться в вертикальной плоскости XY так, что конец A скользит по прямой OY , а конец B — по кривой $y = f(x)$. Плоскость XY вращается с постоянной угловой скоростью Ω вокруг вертикальной оси OY . Трение в системе отсутствует. Какой должна быть функция $f(x)$, чтобы любое положение стержня было положением относительного равновесия, если $f(0) = 0$?

3. Чашка насажена на вертикальную ось. Радиус сферической поверхности чашки $R = 10$ см. Чашка может раскручиваться вокруг вертикальной оси. Маленькую шайбу массой $m = 50$ г кладут на внутреннюю поверхность чашки. Положение шайбы относительно чашки задается углом α . Если чашка не вращается, то шайба покоится в положениях, для которых $\alpha < 20^\circ$. Ускорение свободного падения $g = 10$ Н/кг. Чему равен коэффициент трения покоя между шайбой и внутренней поверхностью чашки? Ответ округлите до сотых. Определить значение угловой скорости (в рад/с) вращения чашки, когда угол $\alpha = 10^\circ$, а шайба не будет двигаться относительно поверхности чашки, и при этом сила трения будет равна нулю. Ответ округлите до десятых.



4. Четыре стержня длины ℓ и пренебрежимо малой массы шарнирно соединены с массами m , как показано на рисунке (центробежный регулятор скорости вращения). Система вращается с постоянной угловой скоростью Ω . Массы слегка выводят из положения равновесия. Определить частоту малых колебаний системы. Масса муфты, свободно перемещающейся по оси вращения и шарнирно скреплённой со стержнями, равна M .



5. Тележка с закреплённым на ней математическим маятником удерживается на наклонной плоскости. Угол наклона плоскости равен α . Тележку отпускают. Описать, как будет вести себя маятник в процессе скатывания тележки с наклонной плоскости. Длину маятника считать известной.

РАЗДЕЛ VII (Основы канонического формализма)

1. Показать, что если для системы второго порядка $\dot{q} = Q(q, p, t)$, $\dot{p} = P(q, p, t)$ сохраняется «фазовый объём», то эта система является гамильтоновой, т.е. существует такая функция $H(q, p, t)$, что $Q(q, p, t) = \frac{\partial H}{\partial p}$, $P(q, p, t) = -\frac{\partial H}{\partial q}$.
2. Материальная точка единичной массы движется по инерции вдоль оси Ox . На фазовой плоскости (x, p_x) выбирается область G_0 — круг единичного радиуса.

Совокупность движений точки (с начальными условиями в G_0) переводит G_0 в G_t . Найти вид области G_t для произвольного момента времени t . Непосредственным вычислением убедиться в сохранении фазового объема.

3. Систему с гамильтонианом $H = pq^3 / Vt$ подвергнуть преобразованию

$$\tilde{q} = \frac{1}{q^2} + \ln(tpq^3), \quad \tilde{p} = pq^3(1 + t \exp(1/q^2))$$

Убедиться, что это преобразование является каноническим. Найти гамильтониан преобразованной системы.

4. Для системы с одной степенью свободы скобки Пуассона функций $H_1(q, p, t)$ и $H_2(q, p, t)$ удовлетворяют соотношению $\{H_1, H_2\} = 1$. Показать, что если гамильтониан системы равен

a) $H = H_1 + H_2$; b) $H = H_1 H_2$;
 c) $H = H_1 / H_2$; d) $H = H_1^2 + H_2^2$,

то общее решение соответствующей канонической системы уравнений можно найти, решив относительно q, p систему алгебраических уравнений:

a) $H_1(q, p, t) = c_1 + t, \quad H_2(q, p, t) = c_2 - t$;
 b) $H_1(q, p, t) = c_1 e^t, \quad H_2(q, p, t) = c_2 e^{-t}$;
 c) $H_1(q, p, t) = c_1 \sqrt{2t + c_2}, \quad H_2(q, p, t) = \sqrt{2t + c_2}$;
 d) $H_1(q, p, t) = c_1 \sin(2t + c_2), \quad H_2(q, p, t) = c_1 \cos(2t + c_2)$.

Типовые вопросы к экзамену:

1. Векторы. Операции над векторами. Кинематические характеристики движения материальной точки. Дифференцирование векторов. Тангенциальная и нормальная компоненты ускорения.
2. Сопровождающий репер. Репер Френе. Уравнения Френе – Серре. Кривизна и кручение – «внутренние» геометрические характеристики траектории. Примеры.
3. Системы ортогональных криволинейных координат. Коэффициенты Ламэ. Основная квадратичная форма в различных системах криволинейных ортогональных координат.
4. Основная задача механики для систем материальных точек. Связь с теоремой Коши. Примеры траекторий.
5. Центр масс системы материальных точек. Примеры нахождения центров масс твёрдых тел. Первый закон Ньютона для системы материальных точек.
6. Система двух материальных точек. Теорема о кинетической энергии системы двух тел. Классификация парных столкновений (ударов).
7. Экстремум функции нескольких переменных. Необходимое условие экстремума. Условный экстремум. Нахождение условного экстремума прямым методом и методом неопределённых множителей Лагранжа.
8. Понятие о вариационных методах механики. Цепная линия. Функционал и его первая вариация. Необходимое условие экстремума.
9. Степени свободы механической системы и обобщённые координаты. Примеры. Принцип наименьшего действия Гамильтона. Уравнения Лагранжа.
10. Функция Лагранжа и её свойства. Принцип относительности Галилея и функция Лагранжа свободной частицы.
11. Функция Лагранжа в криволинейных координатах – примеры механических систем. Функция Лагранжа системы взаимодействующих материальных точек.
12. Однородность пространства-времени и законы сохранения энергии и импульса.
13. Изотропность пространства и закон сохранения момента импульса замкнутой системы.

14. Импульс и момент импульса механической системы в разных инерциальных системах отсчёта. Теорема Кёнига.
15. Движение с одной степенью свободы. Сведение к квадратурам. Финитное движение. Период нелинейных колебаний и его зависимость от энергии.
16. Масштабные преобразования и теория подобия механических систем. Примеры.
17. Теорема о вириале и её применение.
18. Движение относительно неинерциальных систем отсчёта. Переносное ускорение. Кориолисово ускорение. Канонический и кинетический импульсы в неинерциальных системах отсчёта.
19. Задача двух тел. Сведение к задаче о движении одного тела в заданном потенциальном поле. Законы сохранения и сведение к квадратурам.
20. Угловая скорость как вектор. Момент импульса твёрдого тела. Момент инерции и уравнение движения свободного волчка.
21. Функция Гамильтона. Канонические уравнения. Примеры. Неособенные Лагранжианы.
22. Канонические преобразования. Производящая функция канонических преобразований. Фазовое пространство. Примеры.
23. Изменение физических величин со временем. Скобки Пуассона и их свойства. Сохранение физических величин. Теорема Пуассона.
24. Скобки Пуассона для канонически сопряжённых величин. Циклические переменные и интегрирование уравнений Гамильтона.
25. Простейшие колебательные системы. Понятие о нормальных координатах. Секулярное уравнение и собственные (нормальные) колебания.