Оценочные материалы для текущего контроля и промежуточной аттестации по дисциплине

Линейные и нелинейные уравнения физики, семестр 8

Код, направление подготовки	03.03.02 физика
Направленность (профиль)	Цифровые технологии в геофизике
Форма обучения	очная
Кафедра-разработчик	Кафедра экспериментальной физики
Выпускающая кафедра	Кафедра экспериментальной физики

Типовые задания для контрольной работы:

1) Рассмотрите ангармонический осциллятор с затуханием, $\ddot{x}+2\beta\dot{x}+\omega_0^2x+\varepsilon x^5=0$,

в пределе сильного затухания: $(\omega_0^2/4\beta^2)\ll 1$. Постройте приближенное решение, используя метод многих масштабов. Обратите внимание на то, что малым параметром здесь следует считать $\varepsilon_1=\omega_0^2/4\beta^2$. Предварительно перейдите от размерного времени t к безразмерному (например, $\tau=\omega_0^2t/2\beta$).

2) Рассмотрите динамическую систему, описываемую уравнениями

$$\begin{cases} \dot{x}=2x(\lambda_1-\lambda_2x-y), \\ \dot{y}=x\sqrt{1-y^2}+y^2-1, \\ |y|\le 1,\ x\ge 0. \end{cases}$$

Исследуйте фазовый портрет этой системы; установите: а) наличие или отсутствие особых точек в зависимости от значений параметров; б) наличие бифуркаций, предельных циклов, и т.д.

3) Построить равномерно пригодное разложение первого порядка для уравнения $\ddot{x}+\omega_0^2x-\varepsilon(1-x^4)\dot{x}=0$, считая $\varepsilon\ll\omega_0$ (обратите внимание на то, что $[x]=1$). Использовать метод многих масштабов и метод усреднения.

4) Рассмотрите модель «хищник-жертва», в которой x и y - количество особей «жертв» и «хищников» соответственно: $\begin{cases}\dot{x}=\alpha(x)x-xy, \\ \dot{y}=xy-my\end{cases}$, $\alpha(x)=a+bx-x^2$ (при $\alpha=const$ эта модель совпадает с моделью Лоттки – Вольтерра).

Покажите, что бифуркация Андронова – Хопфа возможна не при любых значениях постоянных a и b (NB: по своему смыслу коэффициент $\alpha(x) > 0$!). Каким должен быть характер функции $\alpha(x)$ для того, чтобы бифуркация была возможна? Постройте графики зависимостей $x(t)$ и $y(t)$ для нескольких выбранных значений параметров a, b и m.

5) Построить равномерно пригодное разложение второго порядка для осциллятора Дюффинга, $\ddot{x} + \omega_0^2 x + \varepsilon x^3 = 0$, $\varepsilon / \omega_0^2 \ll 1$, используя метод Линдштедта – Пуанкаре.

6) Рассмотрите т.н. автоколебательную систему с жестким возбуждением: $\ddot{x} - (\lambda + \varepsilon x^2 - x^4)\dot{x} + x = 0$. Исследуйте её фазовый портрет. Ответьте на следующие вопросы:

А) существует ли стационарная точка? Если да, то при каких значениях параметров она устойчива (проиллюстрировать графиком)?

Б) выяснить, имеются ли у этой системы предельные циклы (в каком диапазоне значений параметров?) и являются ли они устойчивыми (т.е. аттракторами).

В) Какие свойства системы, по вашему мнению, дали основание назвать ее системой с «жестким возбуждением»?

7) Используя метод многих масштабов и метод усреднения, построить равномерное по времени разложение первого порядка для уравнения $\ddot{x} - \varepsilon(1 - x^2)\dot{x} + \omega_0^2 x + \varepsilon\omega_0 x^3 = 0 \quad \varepsilon \ll \omega_0$, $[x] = 1$.

8) Исследуйте фазовые портреты для динамической системы, задаваемой уравнениями (уравнения колебаний самолета):

$$\begin{cases} \dot{\varphi} = \rho - \cos\varphi, \\ \dot{\rho} = 2\rho(\lambda - \mu\rho - \sin\varphi). \end{cases}$$

Варьируя один из параметров, проверьте наличие в такой системе бифуркации Андронова – Хопфа (оцените порог бифуркации), а также установите диапазон параметров, в котором происходит рождение предельного цикла и его дальнейшая эволюция.

9) Найдите поправку (она может зависеть от амплитуды) к частоте линейных колебаний осциллятора, описываемого уравнением $\ddot{x} + \omega_0^2 x + \varepsilon x^5 = 0$. Используйте любой из асимптотических методов.

10) Исследуйте систему (описывающую колебания в гликолизе):

$$\begin{cases} \dot{x} = 1 - xy^{\gamma}, \\ \dot{y} = \alpha(xy^{\gamma} - y). \end{cases}$$

Варьируя параметры α и γ, установите, при каких значениях параметров в системе возникает бифуркация Андронова – Хопфа (бифуркация рождения предельного цикла). Как эволюционирует этот предельный цикл с ростом параметра α (γ)? Выводы подкрепить соответствующими графиками.

11) Рассмотрите уравнение $\ddot{x}+\omega_0^2 x+\beta\dot{x}^3=0$, $(\omega_0\beta \sqcup 1)$. Используя метод многих масштабов и метод усреднения построить равномерно пригодное разложение первого порядка для функции $x(t)$ [введите безразмерное время $\tau=\omega_0 t$ и используйте малость параметра $\varepsilon=(\omega_0\beta)^{-1} \sqcup 1$].

12) Рассмотрите динамическую систему (Лоренца):

$$\begin{cases} \dot{x}=\sigma(y-x)\,, \\ \dot{y}=rx-y-xz, \\ \dot{z}=xy-bz \end{cases}$$

при $r=5,12,13.927,20,24.06,28$ и $\sigma=10, b=8/3$. Проанализируйте результаты и ответьте на следующие вопросы:

А) имеют ли место бифуркации в этой системе?

Б) чему равно пороговое значение параметра бифуркации? (дайте оценку)

В) при каких значениях σ и b данная система является консервативной? Гамильтоновой?

13) Используя метод усреднения, построить равномерно пригодное разложение первого порядка для функции $x(t)$, удовлетворяющей уравнению $\ddot{x}(t)+\omega_0^2 x(t)=\varepsilon[\,\omega_0\dot{x}(t)(1-\lambda\dot{x}^2(t))+\dot{x}^2(t)x(t)]$, $\varepsilon \sqcup 1$.

14) Изучите поведение фазовых траекторий для генератора Кислова – Дмитриева, описываемого системой уравнений

$$\begin{cases} Tx+x=Mze^{-z^2}\,, \\ \dot{y}=x-z, \\ \dot{z}=y-\dfrac{z}{Q}\,. \end{cases}$$

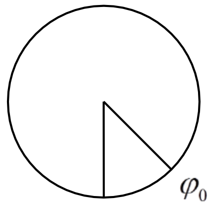
Установите (с некоторой вероятностью) наличие или отсутствие предельных циклов при $T=1$ и $Q=10$ (M - управляющий параметр) и стационарных точек. Дайте соответствующие графические изображения. Как проявляется на графиках симметрия системы Кислова – Дмитриева по отношению к одновременному изменению знаков всех трех координат?

15) Исследовать поведение фазовых траекторий системы Лоттки – Вольтерра

$$\begin{cases} \dot{x}=(a-b\ y)x\,, \\ \dot{y}=(-c+d\ x)y\,, \end{cases} \quad a,b,c,d>0\,.$$

Найти характеристические показатели Ляпунова и сделать вывод о характере стационарной точки. Получить аналитическое выражение для интегральных кривых на фазовой плоскости (то есть найти уравнение вида $F(x,y)=0$ для фазовых траекторий).

16) Тонкая проволока в форме окружности радиуса R вращается с угловой скоростью ω вокруг вертикальной оси, лежащей в плоскости окружности и проходящей через её центр. По проволоке без трения может скользить бусинка. При некотором значении $\omega = \omega_c$ бусинка покидает нижнее положение равновесия и переходит в новое (угол $\varphi = \varphi_0$). Получите уравнение движения бусинки и на его основе определите стационарные точки и значение критической частоты ω_c. На фазовой плоскости построить фазовые портреты для случаев $\omega < \omega_c$ и $\omega > \omega_c$, указав на нем расположение характерных точек, сепаратрис и т.д. Построить график зависимости периода колебаний от энергии для случая $\omega > \omega_c$ [здесь можно использовать переменные действие-угол либо (что более трудоемко) построить временные зависимости угла $\varphi(t)$ при разных начальных данных и по ним вычислить период].



17) Исследовать, при каких значениях параметров a и b динамическая система, описываемая уравнениями $\begin{cases} \dot{x} = a - (b+1)\,x + x^2 y\,, \\ \dot{y} = bx - x^2 y \end{cases}$, имеет устойчивую стационарную точку. Найти эти стационарные решения. Определить тип стационарной точки.

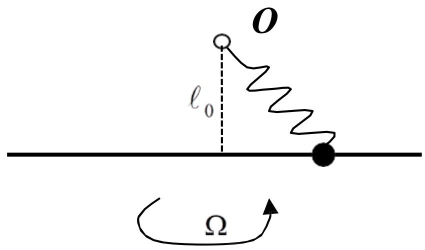
18) Исследуйте систему Ресслера:

$$\begin{cases} \dot{x} = -(y+z)\,, \\ \dot{y} = x + ay, \\ \dot{z} = b + z(x-c) \end{cases}$$

для $b = 2,\ c = 4$ и различных значений a. Имеются ли у этой системы аттракторы (при каких значениях a)? Постройте проекции нескольких фазовых траекторий на координатные плоскости и дайте их 3-мерное изображение. Имеются ли в фазовом пространстве стационарные точки и, если да, каковы их координаты?

19) Найти равномерно пригодное разложение второго порядка для уравнения $\ddot{x} + \omega^2 x + \varepsilon x^2 + \varepsilon \dot{x}^2 = 0$ $(\varepsilon \ll 1)$. Является ли рассматриваемая система гамильтоновой?

20) Динамическая система представляет собой шарик, перемещающийся без трения по горизонтальной спице. Шарик прикреплен к легкой пружине, второй конец которой закреплен шарнирно в точке ***O***, находящейся на расстоянии ℓ_0 от спицы. Спица приводится во вращение с угловой скоростью Ω вокруг вертикальной оси, проходящей через точку ***O***. Жёсткость пружины - k, масса шарика - m, длина нерастянутой пружины совпадает с ℓ_0. Получить уравнения движения динамической системы. Исследовать её фазовые портреты при различных значениях Ω. Указать



положение и характер особых точек на фазовой диаграмме. Установить наличие бифуркационных значений параметра Ω и их физический смысл.

21) Построить равномерно пригодное разложение второго порядка для уравнения $\ddot{x}+\omega^2 x+\varepsilon^2 x^3+\varepsilon\dot{x}^2=0$ $(\varepsilon \ll 1)$.

22) Исследуйте динамическую систему, описываемую уравнением $\ddot{x}+\omega^2 x-(\varepsilon+\cos(x))\dot{x}=0$, рассматривая параметр ε в качестве управляющего параметра. Постройте фазовые портреты для различных значений ε. Определите характер динамической системы, критические значения параметра ε и их физический смысл.

23) При условии, что расстройка частоты имеет второй порядок по ε, постройте резонансные кривые для осциллятора с квадратичной нелинейностью при наличии внешнего гармонического воздействия:

$$\ddot{x}+2\varepsilon^2\beta\dot{x}+x+\varepsilon x^2=\varepsilon^2 f\cos\omega t\,.$$

24) Исследуйте отображение $x_{n+1}=\lambda\cos x_n$. Постройте диаграммы Ламерея, найдите стационарные решения и циклы нескольких низших размерностей, а также соответствующие им критические значения управляющего параметра.

Типовые вопросы к зачёту:

Круг задач и примеры линейных и нелинейных систем
1. Примеры линейных уравнений физики из теории цепей, акустики, электродинамики.
2. Нелинейная физика и нелинейные дифференциальные уравнения. Общие и частные методы решения линейных и нелинейных уравнений (сопоставление). Источники нелинейности.
3. Примеры физических систем, описываемых нелинейными ДУ. Уравнения Бюргерса, Кортевега – де-Фриза, система Лоренца.
Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний
4. Теория возмущений. Разложение по малому параметру (прямой метод). Секулярные члены и определение области применимости разложения.
5. Метод перенормировки и метод Линдштедта - Пуанкаре на примере осциллятора Дюффинга. Эффекты ангармонизма при колебании математического маятника в поле тяжести.
6. Метод многих масштабов в применении к системе Дюффинга.
7. Разделение быстрых и медленных движений. Метод усреднения в применении к осциллятору Дюффинга.
8. Точное решение для осциллятора Дюффинга. Эллиптический интеграл и его свойства. Сопоставление точного и приближенного решений.
9. Общее рассмотрение одномерных нелинейных колебаний. Переменные действие-угол и интегрируемость.
10. Теория возмущений для линейного гармонического осциллятора с затуханием. Сопоставление прямого разложения с точным решением. Особенности применения методики Линдштедта – Пуанкаре к ЛГО с затуханием.

11. Метод многих масштабов и метод усреднения в применении к ЛГО с затуханием.
Системы с самовозбуждением. Автоколебания
12. Нелинейные колебания с самовозбуждением. Уравнения Рэлея и Ван-дер-Поля. Сравнение системы Ван-дер-Поля и ЛГО с затуханием.
13. Прямой метод и метод Линдштедта – Пуанкаре в применении к системе Ван-дер-Поля.
14. Вынужденные колебания в нелинейных системах на примере осцилляторов Дюффинга и Ван-дер-Поля. Связь характера нелинейности со спектральной характеристикой отклика.
15. Прямой метод и метод вариации постоянных в применении к системе Ван-дер-Поля. Характерные особенности поведения осциллятора Ван-дер-Поля при $t \to \infty$. Пороговый характер возникновения автоколебаний. Бифуркация Андронова – Хопфа.
Основы теории динамических систем
16. Динамические системы. Гамильтоновы системы. Фазовое пространство. Необходимое условие «гамильтоновости» динамических систем и теорема Лиувилля.
17. Автономные и неавтономные динамические системы. Исследование устойчивости решений (общая постановка задачи). Примеры автономных систем и способы приведения неавтономных систем уравнений к «автономному» виду.
18. Устойчивость по Ляпунову. Показатели Ляпунова. Фазовые потоки, их свойства и разновидности. Инвариантные множества оператора эволюции автономных систем. Аттракторы. Понятие о «странных» аттракторах. Примеры
19. Двумерные автономные фазовые потоки. Классификация особых точек Критерий возникновения бифуркации «фокус-седло».
20. Система Лоттки – Вольтерра и ее свойства в зависимости от значений управляющих параметров.
21. Система Лоренца и ее моделирование в различных диапазонах значений параметров.
Метод дискретных отображений в теории динамических систем
22. Теорема А. Пуанкаре «о возврате». Отображение Пуанкаре для гамильтоновых систем. Функция последования и ее свойства. Бифуркация удвоения периода.
23. Дискретные отображения и их использование в теории динамических систем. Диаграммы Ламерея. Примеры отображений.
24. Особые точки дискретных отображений. Удвоение периода, хаос и универсальность Фейгенбаума.
25. Двумерные отображения. Эргодичность и перемешивание (примеры отображений).